数理解析研究所講究録
280巻 1976年 85-93

Spin(4,1) 上の球函数の展開について

早大 理工 大豆生田稚一

§1 序 Harish-Chandra は[2]に於て半単純リー群 G 上のある種の球函数の指数函数の巾による展開を与えたが，これは，G 上の Paley-Wiener 型定理，特に逆 Fourier 変換の性質の研究に重要な意義を持つ。しかし，この展開に現れる「係数」はルート系に関する複雑な induction によって与えられているので，一般には詳しい性質は明らかではない。ここでは $G=Spin(4,1)$ に対し，この展開の「特異点」の分布を求める。これは $Spin(4,1)$ 上の Paley-Wiener 型定理の証明に必要となる。([3])．

§2 Harish-Chandra による $E(z,\nu,x)$ の展開

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ によって複素数体，実数体，整数環を表わす。又，$k=\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ 上の線型空間 E, E' に対して，E から E' への線型写像（k 上の）全体を $\mathrm{Hom}_k(E,E')$ と書く。

$G=Spin(4,1)$，K をその極大コンパクト部分群．$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ を

各々のリー環，又対応する Cartan involution を θ とする。
$G=KAN$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ を岩沢分解，対応する $g\in G$ の分解を $g=k(g)\exp H(g)\,n(g)$ $k(g)\in K$，$H(g)\in\mathfrak{a}$，$n(g)\in N$ とする。α を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ に関する正の制限ルートとすれば，$\mathbb{C}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ とは $z\longleftrightarrow z\alpha$ によって同一視出来る。又，W を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Weyl 群とすれば，W は K の中心の位数2の部分群と同一視出来る。W の単位元を e，位数2の元を s と書くと，$s\alpha=-\alpha$ によって $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ に作用する。

M を $\mathfrak{a}$ の K に於ける中心化群，(τ_i, V_i) $(i=1,2)$ を K の既約ユニタリ表現．このとき．$V_M=\{v\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1);\ \tau_1(m)v=v\tau_2(m)$ $\forall m\in M\}$ とおく。又 τ_i を $\mathfrak{k}$ の展開環の表現へ拡張し，再び同一の記号 τ_i で表わす。

そこで，$z\in\mathbb{C}$，$v\in V_M$，$x\in G$ に対して．

(1) $\quad E(z,v,x)=\int_K e^{(z-\frac{1}{2})\alpha(H(xk))}\,\tau_1(k(xk))\,v\,\tau_2(k^{-1})\,dk.$

ここで dk は K の正規化された Haar 測度とする。

$V^M=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_M,V_M)$，$H\in\mathfrak{a}$，$\alpha(H)=1$ となる H に対して，$a_t=\exp(tH)$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく。すると Harish-Chandra による $E(z,v,a_t)$ の展開定理は次の様になる。（[2] 及び [6] の 9章）

<u>命題1</u>　V^M に値をもつ $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 C_w $(w\in W)$

と，V^M に値をとる有理函数 $\Gamma_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ が存在して，次の性質を満す：

(2) $E(z,v,a_t)=\Phi(z,t)C_e(z)v+\Phi(-z,t)C_s(z)v$

$t\in\mathbb{R}\quad t>0,\quad v\in V_M$

(3) $\Phi(z,t)=e^{(z-\frac{3}{2})t}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_k(z)e^{-kt}\qquad t\in\mathbb{R}\quad t>0$

但し，上の等式は $\mathbb{C}$ の適当な open dense な部分集合 $O(T_1,T_2)$ 上の正則函数として成立する。

注意 Γ_k は k に関する帰納的な等式によって定義される。又，この等式は T_1,T_2 によって定められる。$t>0$ を固定したとき $\Phi(z,t)C_e(z)$，$\Phi(-z,t)C_s(z)$ は $O(T_1,T_2)$ 上正則であるが，$\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続出来る。

以下の議論は $t>0$ を固定したとき $z\mapsto\Phi(z,t)$ の特異点の性質と分布を扱う。

§3 Γ_k，及び C_ω の計算

K，M の既約ユニタリ表現の同値類の全体をそれぞれ，$\hat{K}$，$\hat{M}$ で表わす。表現の highest weight を考えれば，

$\hat{K}=\{(n,n')\ ;\ 2n,2n'\ \ n-n'\in\mathbb{Z}\quad |n'|\leq n\}$

$\hat{M}=\{n''\ ;\ 2n''\in\mathbb{Z}\quad n''\geq 0\}$

と同一視出来る。

$\tau \in (n, n') \in \hat{R}$ に対して

$\hat{M}(\tau) = \{ n'' \in \hat{M} ;\ |n'| \leqq n'' \leqq n \quad n - n' \in \mathbb{Z} \}$.

又, $\tau_i \in (n_i\ n_i') \in \hat{R} \quad i = 1, 2$ に対して

$\hat{M}(\tau_1, \tau_2) = \hat{M}(\tau_1) \cap \hat{M}(\tau_2)$

と書く。

ω_M を M の Casimir 作用素とすると $\sigma \in (n'') \in \hat{M}$ に対して, $\sigma(\omega_M) = n''(n''+1)\, id_\sigma$ (id_σ は σ の表現空間上の恒等作用素). 又 $(n'') \in \hat{M}(\tau)$ に対し.

$$C_{n''}(z, \tau) = \frac{\varepsilon^{2n''}\ 2^{-2z+3}\, \Gamma(2z)\, \Gamma(-z+\frac{3}{2}+n)\, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-|n'|)}{\Gamma(-z+\frac{3}{2}+n'')\, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-n'')\, \Gamma(z+\frac{3}{2}+n)\, \Gamma(z+\frac{1}{2}-|n'|)}$$

とする。

ここで, $\varepsilon = \begin{cases} -1 & n' < 0 \\ 1 & n' \geqq 0 \end{cases}$

又, Γ は普通の Γ- 函数とする。

<u>命題 2</u>

1) $\hat{M}(\tau_1, \tau_2) \neq \phi \iff V_M \neq \{0\}$.

2) $\hat{M}(\tau_1, \tau_2) \neq \phi$ とする。各 $p \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2)$ に対して $V_p \neq 0 \in V_M$ が存在して. $\tau_1(\omega_M) V_p = V_p \tau_2(\omega_M) = p(p+1) V_p$ であり. $\{V_p ;\ p \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2)\}$ が V_M の基底となる。

又, $i = 1, 2$ に対し, 次の等式が成立する。

(5) $\int_{\bar{N}} e^{-(z+\frac{3}{2})\alpha H(\bar{n})}\, V_p \tau_i(\kappa(\bar{n})\theta)^{-1}\, d\bar{n} = C_p(z, \tau_i) V_p$.

ここで $d\bar{n}$ は $\bar{N}=\exp\bar{\mathfrak{n}}$ 上の Haar 測度であり，

$\int_{\bar{N}} e^{-3\alpha(H(\bar{n}))}d\bar{n}=1$ となる様正規化されているものとする。1, $\mathrm{Re}\,z>0$ とする。

$$(6)\quad \begin{cases} C_e(z)v_p = C_p(z,\tau_2)\,v_p\,\tau_2(\Delta) \\ C_\theta(z)v_p = C_p(-z,\tau_1)\,v_p\,\tau_2(\Delta) \end{cases} \qquad p\in A(\tau_1,\tau_2)$$

さらに，$\Gamma_k(z)v_p=\sum_{q\in A(\tau_1,\tau_2)}\Gamma_k(z,p,q)v_q$ と書き表わすとき，$a_{r,q},\ b_q\in\mathbb{C}$ が存在して．

$$\begin{aligned}(7)\ \{2kz-k^2+p(p+1)-q(q+1)\}\Gamma_k(z,p,q) &= 6\sum_{j\geq1}\{z-(\tfrac{3}{2}+k-2j)\}\Gamma_{k-2j}(z,p,q)\\ &\quad+4\sum_{j\geq1}(2j-1)\sum_{r\in A(\tau_1\tau_2,p)}a_{rq}\Gamma_{k-(2j-1)}(z,p,r)\\ &\quad-4\sum_{j\geq1}j\,b_q\,\Gamma_{k-2j}(z,p,q)\end{aligned}$$

ここで，

$$\Gamma_k(z,p,q)\equiv 0 \qquad k<0$$

$$\Gamma_0(z,p,q)=\begin{cases}1 & p=q\\ 0 & p\neq q\end{cases}$$

又，$A(\tau_1,\tau_2,p)=\{r\in A(\tau_1,\tau_2)\ |r-q|\leq 1\}$.

証明の概略．

まず，1) と 2) の前半は，K が $SU(2)\times SU(2)$ に同型であり，M がその対角部分群と考えられる（[4]）から，表

現の分岐律を適用すればよい。([11]) (5)の左辺はGの主系列の intertwining operator から得られる。(intertwining operator を type τ_i の K-finite ベクトルに作用させることの積分が得られる。) そこで, (5)の両辺の $\tau\in(n, n')$ に関する巡回公式を調べると, 同一であることが分る。従って(5)は $n=|n'|=p$ の場合に帰着され, この場合は, 実際に積分を計算して得られる。(6)については [6] の9章, 9.1.6 と同様の議論によって与えられる。最後に(7)は T_k の定義式に於ける V_M 上の線型写像の V_p に関する行列要素を計算すればよいが, これは, 非常に複雑な計算を必要とする。特に, (K, M) の表現に関する可成り詳しい分岐律についての結果が必要となる。

§4 $\Phi(z, t)$ の「特異点」の分布.

$t>0$ を固定したとき $z\mapsto\Phi(z, t)$ の ベクトル値函数としての特異点を $\Phi(z, t)$ の特異点と呼ぶ。$t>0$ を固定したとき $z\mapsto\Phi(z, t)$ の特異点の集合は命題1により $\mathbb{C}$ の discrete な部分集合であることが分る。そこで(2)の両辺の特異点の回りの Laurent 展開を考えることが出来る。(1)により $E(z, \nu, a_t)$ は zの函数として整函数である。そこで, Laurent 展開の係数の $t\to+\infty$ での行動を

考えると，(3)により，$z \mapsto \Phi(z,t)C_e(z)V$，$z \mapsto \Phi(z,t)C_o(z)V$ の特異点は $t>0$ に無関係に定まり，又高々1位の極であることが結論出来る。故に「$\Phi(z,t)$ の特異点」が意味を持つ。さらに，(6)を考えれば，$z \mapsto \Phi(z,t)V_p$ は高々2位の極しか持たないことが分る。$\Phi(z,t)V_p$ の特異点について次の命題が成立する。

<u>命題3</u>　$\hat{M}(T_1,T_2) \neq \emptyset$ とする。$t \in \mathbb{R}$，$t>0$ 及び $p \in \hat{M}(T_1,T_2)$ を固定したとき $z \mapsto \Phi(z,t)V_p$ は $\mathbb{C}$ 上 V_M に値をとる有理型函数であり，その特異点は t に無関係に定まり，1位の極である。さらに次の点を除いては，函数 $\Phi(z,t)V_p$ は正則である。

1) $z=k$　$k>0$　$k-p \in \mathbb{Z}$
2) $z=k+\frac{1}{2}$　$k \in \hat{M}(T_1,T_2)$，$p<k$
3) $z=k+\frac{1}{2}$　$2k \in \mathbb{Z}$，$p-k \in \mathbb{Z}$，$0 \leq k < \min(M_1', M_2')$
4) $z=-k-\frac{1}{2}$　$k \in \hat{M}(T_1,T_2)$　$k<p$

証明の概略．

$t>0$，$z \mapsto \Phi(z,t)C_e(z)V_p$，$z \mapsto \Phi(-z,t)C_o(z)V_p$ の $z=z_0$ に於ける留数をそれぞれ $\psi_e(z_0,t)$，$\psi_o(z_0,t)$ とする。このとき，ψ_e，ψ_o は $G \setminus K$ 上の実解析函数

$\Phi_e(z_0\ x),\ \Phi_s(z_0\ x)$ であって 函数等式

$$\Phi_w(z_0\ k_1 x k_2) = \tau_1(k_1)\ \Phi_w(z_0\ x)\ \tau_2(k_2)$$

$$k_1,\ k_2 \in K, \quad x \in G \setminus K \quad w = e,\ s$$

を満す様に一意に拡張出来る。

さらに $\mathfrak{Z}$ を G 上の両側不変微分作用素全体の作る環とすると $\Phi_w(z_0,\ x)$ は $\mathfrak{Z}$ に関する同時固有函数となることが分る。又、このとき、その固有値は z_0 及び p によって一意に決定される。

I J の結果の内で、$\mathfrak{Z}$ に関する固有値と $\lim_{t\to\infty} \Phi_w(z_0\ a_t)$ の行動に関する評価の部分は $\Phi_w(z_0\ a_t) = \Psi_w(z_0\ t)$ の $t=0$ と無関係に成立する。このことから、(7) を用いて、z_0 が命題 3 の除外点でなければ、$\Psi_w(z_0\ t) = 0$ が結論出来る。

尚、詳しい証明は [3] に於いて発表する予定です。

参考文献

[1] H. Boerner : Darstellungen von Gruppen, Springer

[2] Harish-Chandra : Differential equations and semi-simple Lie groups (unpublished)

[3] M. Mamiuda : An analogue of Paley-Wiener-theorem on the de Sitter group (to appear)

[4] R. Takahashi : Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés.
Soc. Math. France., 91 289-433 (1963)

[5] P.C. Trombi, V.S. Varadarajan ; Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group ; the discrete spectrum.
Acta Math, 129, 237-280 (1972)

[6] G. Warner ; Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer.